GRIFFIN

erc | Advanced Grant

Simplificación de las ecuaciones diferenciales para un ornitóptero en flapping mode

Nueva adimensionalización de las ecuaciones

- Se observan dos órdenes de tiempo en los resultados numéricos.
  - Tiempo del orden del periodo de aleteo.
  - Tiempo de estabilización (modo fugoide).
- Para que estos tiempos queden mejor presentados, se realiza una readimensionalización de las ecuaciones bajo los siguientes parámetros.

$$U_c = \sqrt{\frac{mg}{\pi \rho S}}; \quad L_c = \frac{c}{2}; \quad t_c = \frac{1}{\omega}$$

$$\mathcal{M} = \omega \sqrt{\frac{m}{\pi \rho S g}}; \quad \chi = \frac{m g l_w}{\omega^2 I_y}; \quad k = \frac{\omega c}{2U_c} \frac{1}{U_b}$$

Nueva adimensionalización de las ecuaciones

- Se añade también un cambio para los coeficientes aerodinámicos, dividiéndolos entre el factor 2π
- Esto permite que los coeficientes aerodinámicos queden fijados por el orden del parámetro pequeño a considerar en las ecuaciones: ϵ
- Este parámetro pequeño esta definido por la amplitud de las oscilaciones.

$$C_L^* = \frac{k^2}{2} h_0 \cos(t) + \frac{AR}{AR+2}\Big(\alpha F(k) + k h_0 (G(k)\cos(t) + F(k)\sin(t))\Big)$$

$$C_T^* = \frac{2}{\pi}\Big(-\alpha^2 G_1(k) + \alpha k h_0 (F_1(k)\cos(t) - 2G_1(k)\sin(t)) + (kh_0)^2 \sin(t)\,(F_1(k)\cos(t) - G_1(k)\sin(t))\Big)\frac{AR}{AR+2}$$

Nueva adimensionalización de las ecuaciones

- Las ecuaciones resultantes tienen una forma similar a las anteriores

$$\mathcal{M}\dot{U}_b = U_b^2\left(C_T^* - \left(C_{D0w}^* + C_{Di}^* + Li^* + \Lambda(C_{Dit}^* + C_{D0t}^*)\right)\right) - \sin(\gamma)$$

$$\mathcal{M}U_b\dot{\gamma} = U_b^2(C_L^* + \Lambda C_{Lt}^*) - \cos(\gamma)$$

$$\begin{aligned}\dot{q} = \chi U_b^2 (C_L^* \cos(\alpha) &- (C_T^* - C_{D0w}^* - C_{Di}^*)\sin(\alpha) + \mathcal{L}\Lambda[C_{Lt}^*\cos(\alpha) + (C_{Dit}^* + C_{D0t}^*)\sin(\alpha)] \\ &- \mathcal{R}_{HL}\{C_L^*\sin(\alpha) + (C_T^* - C_{D0w}^* - C_{Di}^*)\cos(\alpha) + \mathcal{H}\Lambda[C_{Lt}^*\sin(\alpha) - (C_{Dit}^* + C_{D0t}^*)\cos(\alpha)]\})\end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = q$$

Reescalado

- Para solucionar el problema de dimensiones de la velocidad y los parámetros adimensionales se reescala esta variable:

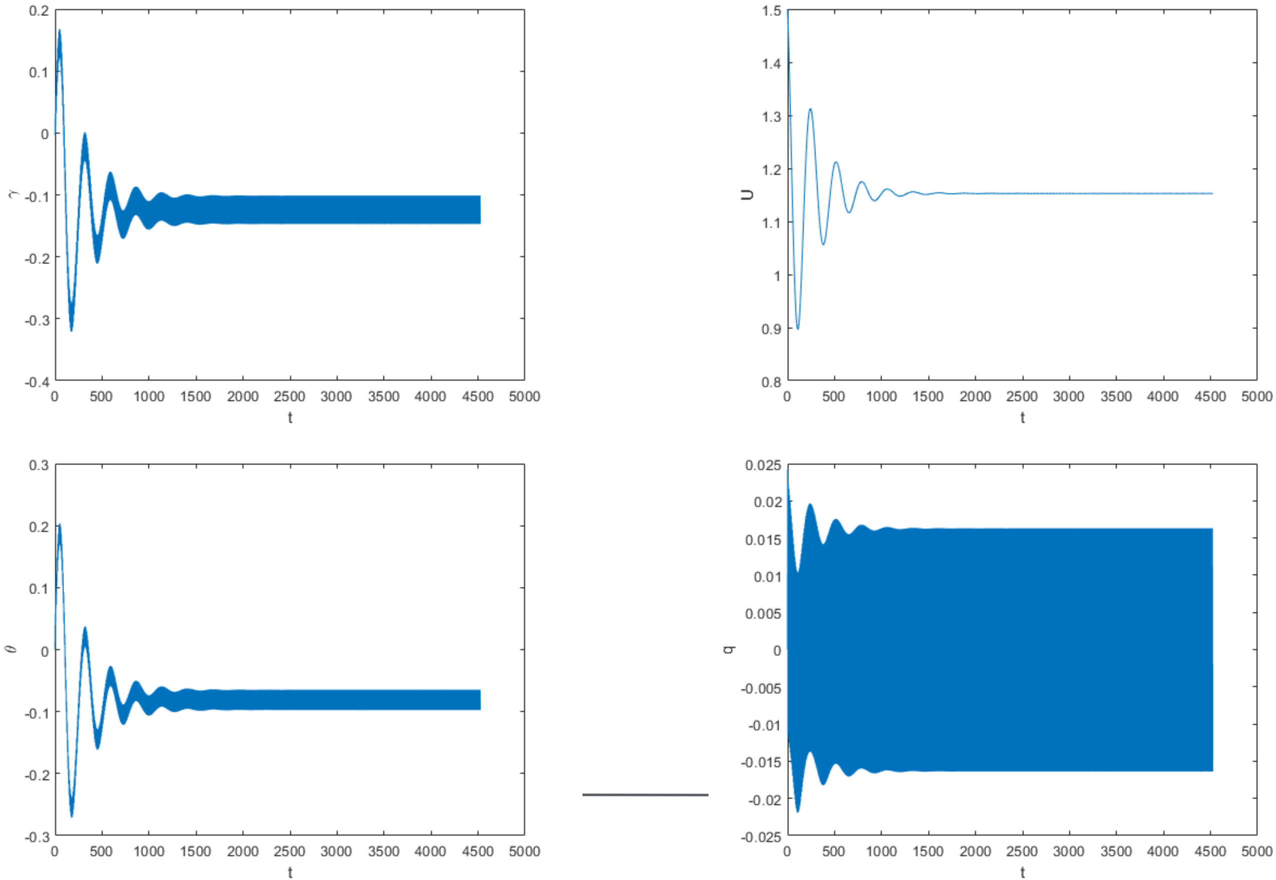
$$U = \frac{U_b}{M}; \quad U_c^* = \frac{\pi\rho S}{m\omega} U_b$$

- Se considera también el orden unidad para los factores adimensionales:

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{M}^*}{\sqrt{\epsilon}}; \quad \chi = \epsilon\chi^*$$

- Se consideran además las dos escalas temporales:

$$\tau = \epsilon t; \quad t$$



γ
U
θ
q
t
t
t
t

Solución en perturbaciones

- Variables con las formas:

$$\alpha = \epsilon[\alpha_0(t,\tau) + \epsilon\alpha_1(t,\tau) + \cdots]$$

$$U = U_0(\tau) + \epsilon U_1(t,\tau) + \epsilon^2 U_2(t,\tau) + \cdots$$

$$\theta = \theta_0(\tau) + \epsilon\theta_1(t,\tau) + \epsilon^2\theta_2(t,\tau) + \cdots$$

- Se usa α en vez de γ para simplificar las ecuaciones.
- El ángulo de trayectoria se puede expresar a partir de la diferencia entre estos ángulos:

$$\gamma = \theta - \alpha = \theta_0 + \epsilon(\theta_1 - \alpha_0) + \epsilon^2(\theta_2 - \alpha_1) + \cdots$$

Ecuación de la velocidad

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right)(U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \cdots)$$

$$= (U_0^2 + 2\epsilon U_0 U_1 + \cdots)\left[(b_1 + \Lambda b_4)\alpha^2 + b_2 \alpha e^{it} + b_3 e^{2it} + C_{Th}^* - C_D^*\right] - \frac{\epsilon}{M^{*2}} \sin[\theta_0 + \epsilon(\theta_1 - \alpha_0) + \cdots]$$

- Orden ϵ

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial \tau} = \frac{\sin(\theta_0)}{M^{*2}}$$

- Orden ϵ^2

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = U_0^2\left[(b_1 + \Lambda b_4)\alpha^2 + b_2 \alpha e^{it} + b_3 e^{2it} + C_{Th}^* - C_D^*\right] - \frac{(\theta_1 - \alpha_0)}{M^{*2}} \cos(\theta_0)$$

GRIFFIN

erc Advanced Grant

Ecuación del ángulo de trayectoria

$$(U_0+\epsilon U_1+\epsilon^2 U_2+\cdots)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial}{\partial \tau}\right)(\theta_0(\tau)+\epsilon(\theta_1-\alpha_0)+\epsilon^2(\theta_2-\alpha_1)+\cdots)$$

$$=(U_0^2+2\epsilon U_0 U_1+\cdots)\left[a_1\alpha+a_2 e^{it}+\Lambda\left(a_3\alpha+a_4\left(\frac{\partial}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\theta+a_5\left(\frac{\partial}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\alpha\right)\right]-\frac{\epsilon}{M^{*2}}\cos[\theta_0+\cdots]$$

- Orden ϵ

$$U_0\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}+\frac{\partial(\theta_1-\alpha_0)}{\partial t}\right)=U_0^2\left[a_1\alpha_0+a_2 e^{it}+\Lambda\left(a_3(\alpha_0+\delta_t^*)+a_4\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)+a_5\frac{\partial\alpha_0}{\partial t}\right)\right]-\frac{\cos(\theta_0)}{M^{*2}}$$

- Orden ϵ^2

$$U_1\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}+\frac{\partial(\theta_1-\alpha_0)}{\partial t}\right)+U_0\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}+\frac{\partial(\theta_2-\alpha_1)}{\partial t}\right)=2U_0U_1\left[a_1\alpha_0+a_2 e^{it}+\Lambda\left(a_3(\alpha_0+\delta_t^*)+a_4\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+U_0^2\left[a_1\alpha_1+\Lambda\left(a_3\alpha_1+a_4\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)+a_5\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial\tau}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}\right)\right)\right]-\frac{(\theta_1-\alpha_0)}{M^{*2}}\sin(\theta_0)\right.$$

Ecuación de momentos

- Orden ϵ

$$\frac{1}{M^{*2}\chi^*}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2} = U_0^2\left(a_1\alpha_0 + a_2 e^{it} + \mathcal{L}\Lambda\left(a_3(\alpha_0+\delta_t^*) + a_4\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right) + a_5\frac{\partial\alpha_0}{\partial t}\right)\right)$$

- Orden ϵ^2

$$\frac{1}{M^{*2}\chi^*}\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\tau\partial t} + \frac{\partial^2\theta_0}{\partial\tau^2}\right)$$

$$= U_0^2\left(a_1\alpha_1 + \mathcal{L}\Lambda\left(a_3\alpha_1 + a_4\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right) + a_5\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial\tau}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}\right)\right)\right.$$

$$\left.-\mathcal{R}_{HL}\left(\alpha_0\left(a_1\alpha_0 + a_2e^{it}\right) + b_1\alpha_0^2 + b_2\alpha_0 e^{it} + b_3 e^{2it} + C_{Th}^* - C_D^*\right)\right)$$

$$+ 2U_0U_1\left(a_1\alpha_0 + a_2 e^{it} + \mathcal{L}\Lambda\left(a_3(\alpha_0+\delta_t^*) + a_4\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right) + a_5\frac{\partial\alpha_0}{\partial t}\right)\right)$$

Forma de la solución

- Velocidad

$$U_0 = U_0(\tau); \quad U_1 = U_1(\tau)$$

$$U_2 = V_1(\tau)e^{it} + V_2(\tau)e^{2it} + V_3(\tau)$$

- Ángulo de pitch

$$\theta_0 = T_0(\tau)$$

$$\theta_1 = T_1(\tau)e^{it} + T_2(\tau)$$

- Ángulo de ataque

$$\alpha_0 = A_0(\tau)e^{it} + A_1(\tau)$$

Ecuaciones U_0, T_0, A_1

$$\frac{dU_0}{d\tau} = -\frac{\sin(T_0)}{M^{*2}}$$

$$(U_0 - U_0^2 \Lambda a_4)\left(\frac{dT_0}{d\tau}\right) = U_0^2\left(A_1(a_1 + \Lambda a_3) + \Lambda a_3 \delta_t^*\right) - \frac{\cos(T_0)}{M^{*2}}$$

$$0 = U_0^2\left(A_1(a_1 + \mathcal{L}\Lambda a_3) + \mathcal{L}\Lambda\left(a_3\delta_t^* + a_4\frac{dT_0}{d\tau}\right)\right)$$

- Si $T_0 = 0$

$$U_0 = \frac{1}{M^*}\sqrt{\frac{a_1 + \mathcal{L}\Lambda a_3}{\delta_t^* a_1 \Lambda a_3 (1-\mathcal{L})}}; \quad A_1 = -\frac{\mathcal{L}\Lambda a_3 \delta_t^*}{a_1 + \mathcal{L}\Lambda a_3}$$

Ecuaciones T_1, A_0

$$i(T_1 - A_0) = U_0\left[a_1 A_0 + a_2 e^{it} + \Lambda(a_3 A_0 + i a_4 T_1 + i a_5 A_0)\right]$$

$$-\frac{1}{M^{*2}\chi^*} T_1 = U_0^2\left(a_1 A_0 + a_2 + \mathcal{L}\Lambda(a_3 A_0 + i a_4 T_1 + i a_5 A_0)\right)$$

Ecuaciones V_1, V_2

$$V_1 = -iU_0^2(2b_1 A_0 A_1 + b_2 A_1) + i\,\frac{T_1 - A_0}{M^{*2}} \cos T_0$$

$$V_2 = -\frac{iU_0^2}{2}(b_1 A_0^2 + b_2 A_0 + b_3)$$

GRIFFIN

erc Advanced Grant

Ecuaciones U_1, T_2, A_3

$$\frac{dU_1}{d\tau} = U_0^2(b_1(A_0^2 + A_1^2) + b_2 A_0 + C_{Th}^* - C_D^*) - \frac{T_2 - A_1}{M^{*2}}\cos(T_0)$$

$$U_1\frac{dT_0}{d\tau} + U_0\frac{dT_2}{d\tau} = U_0^2\left(A_1(a_1 + \Lambda a_3) + \Lambda a_3\delta_t^* + \Lambda a_4\frac{dT_0}{d\tau}\right)$$

$$+U_0^2\left(a_1 A_3 + \Lambda a_3 A_3 + \Lambda a_4\frac{dT_2}{d\tau} + \Lambda a_5\frac{dA_1}{d\tau}\right) - \frac{T_1 - A_1}{M^{*2}}\sin(T_0)$$

$$\frac{1}{M^{*2}\chi^*}\frac{d^2T_0}{d\tau^2} = U_0^2\left(a_1 A_3 + \mathcal{L}\Lambda a_3 A_3 + \mathcal{L}\Lambda a_4\frac{dT_2}{d\tau} + \mathcal{L}\Lambda a_5\frac{dA_1}{d\tau}\right.$$

$$\left.-\mathcal{R}_{HL}\left((b_1 + a_1)(A_0^2 + A_1^2) + (a_2 + b_2)A_0 + C_{Th}^* - C_D^*\right)\right)$$

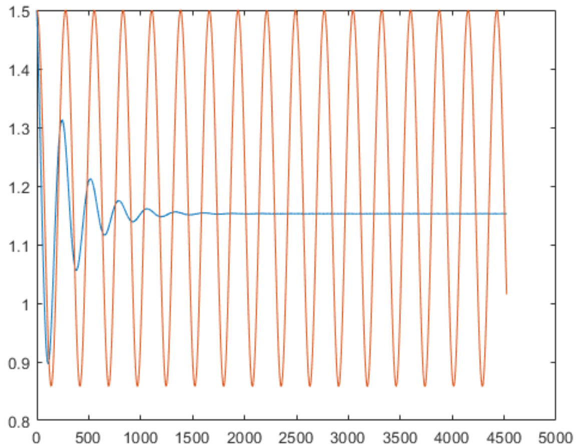
$$+2U_0U_1\left(A_1(a_1 + \mathcal{L}\Lambda a_3) + \mathcal{L}\Lambda\left(a_3\delta_t^* + a_4\frac{dT_0}{d\tau}\right)\right)$$

GRIFFIN

erc Advanced Grant

Comparación numérica

- Resultados buenos cuando se llega al estacionario (sin ecuaciones diferenciales).
- Problema ecuaciones diferenciales: falta de amortiguamiento.



Comparación numérica

- Solución: considerar funciones no dependientes del ángulo de ataque del empuje y resistencia aunque en principio sean de un orden menor